

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета

\_\_\_\_\_  
(подпись) ФИО  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Направление/специальность подготовки	24.04.05 Двигатели летательных аппаратов
Специализация/профиль/программа подготовки	Авиационная и ракетно-космическая теплотехника
Уровень высшего образования	Магистратура
Форма обучения	Очная
Факультет	А Ракетно-космической техники
Выпускающая кафедра	А9 ПЛАЗМОГАЗОДИНАМИКА И ТЕПЛОТЕХНИКА
Кафедра-разработчик рабочей программы	О6 ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

КУРС	СЕМЕСТР	ОБЩАЯ ТРУДОЁМКОСТЬ (ЗАЧЕТНЫХ ЕДИНИЦ)	ЧАСЫ (по наличию видов занятий)									ВИД ПРОМЕЖУТОЧНОГО КОНТРОЛЯ
			ОБЩАЯ ТРУДОЁМКОСТЬ	АУДИТОРНЫЕ ЗАНЯТИЯ				САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА				
				ВСЕГО	ЛЕКЦИИ	ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ	ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ	ВСЕГО	КУРСОВОЙ ПРОЕКТ	КУРСОВАЯ РАБОТА	ДРУГИЕ ВИДЫ САМОСТ. РАБОТЫ	
5	9	3	108	51	34	0	17	57	0	0	57	зач.
5	10	3	108	51	34	0	17	57	0	0	57	диф. зач.
ВСЕГО		6	216	102	68	0	34	114	0	0	114	

ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА СОСТАВЛЕНА В СООТВЕТСТВИИ С ТРЕБОВАНИЯМИ ФЕДЕРАЛЬНОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТА ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ (ФГОС ВО)

24.04.05 Двигатели летательных аппаратов

год набора группы: 2024

Программу составили:

Кафедра О6 ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Белкова Анастасия Леонидовна, к.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_

Кафедра О6 ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Чернусь Павел Павлович, к.т.н., доцент

\_\_\_\_\_

Программа рассмотрена

на заседании кафедры-разработчика

рабочей программы **О6 ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА**

Заведующий кафедрой Винник П.М., д.т.н., доц.

\_\_\_\_\_

Программа рассмотрена

на заседании выпускающей кафедры

**А9 ПЛАЗМОГАЗОДИНАМИКА И ТЕПЛОТЕХНИКА**

Заведующий кафедрой Тетерина И.В., к.т.н., доц.

\_\_\_\_\_

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ**

**Разделы рабочей программы**

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ
2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВО
3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ
4. ФОРМЫ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ
5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ
6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

**Приложения к рабочей программе дисциплины**

- Приложение 1. Аннотация рабочей программы
- Приложение 2. Технологии и формы обучения
- Приложение 3. Фонды оценочных средств

## 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-2 — способность использовать современные информационные технологии при выполнении научных исследований и разработок; использовать стандартные пакеты прикладных программ; способен к алгоритмизации процесса вычислений при проведении исследований; организовывать и соблюдать требования информационной безопасности в профессиональной деятельности
ОПК-4 — способность использовать основные положения, законы и методы естественных наук и математики, разработки физических и математических моделей исследуемых процессов, явлений и объектов для постановки и решения научно-технических задач по направлению подготовки

Формированию компетенций служит достижение следующих результатов образования:

### **ОПК-2**

*знания:*

1. основные методы решения задач вариационного исчисления;
2. основные положения функционального анализа, необходимые для решения задач математической физики;

*умения:*

1. правильно определять модель применяемой классической задачи в зависимости от формулировки исходной задачи;
2. критически анализировать параметры построенных моделей и их результаты;

*навыки:*

разработки новых методов исследования и их применению в самостоятельной научно-исследовательской и в области профессиональной деятельности.

### **ОПК-4**

*знания:*

1. основные задачи вариационного исчисления;
2. основные методы решения задач математической физики;

*умения:*

1. способностью к критическому анализу и оценке поставленных задач, генерированию новых идей при решении;
2. способностью планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития; исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях;

*навыки:*

проектировать и осуществлять комплексные исследования, на основе целостного системного научного подхода.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВО

Дисциплина **ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ** является дисциплиной **обязательной части блока 1** программы подготовки по направлению *24.04.05 Двигатели летательных аппаратов*.

Содержание дисциплины является логическим продолжением содержания физико-математической подготовки бакалавра и служит основой для освоения дисциплин: **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ, ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ, НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА, ТЕЧЕНИЕ ГАЗА С ЧАСТИЦАМИ**

### 3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 з.е., 216 ч.

#### 3.1. Содержание (дидактика) дисциплины

КУРС	СЕМЕСТР	Наименование разделов и дидактических единиц	ВСЕГО	Аудиторные занятия в контактной форме			Самостоятельная работа студентов	Формируемая компетенция, %	
				ВСЕГО	Лекции	Практические занятия		ОПК-2	ОПК-4
5	9	Раздел 1. Простейшая задача классического вариационного исчисления. 1.1 Простейшая задача классического вариационного исчисления. 1.2 Необходимое условие экстремума в простейшей задаче классического вариационного исчисления.	15	6	4	2	9	10	10
5	9	Раздел 2. Достаточные условия слабого минимума в простейшей задаче. 2.1 Достаточные условия слабого минимума в простейшей задаче классического вариационного исчисления. 2.2 Условие Лежандра. 2.3 Условие Якоби.	20	8	6	2	12	10	10
5	9	Раздел 3. Функция Вейерштрасса. Необходимое условие сильного минимума в простейшей задаче классического вариационного исчисления. 3.1 Необходимое условие сильного минимума в простейшей задаче классического вариационного исчисления. 3.2 Функция Вейерштрасса. Связь условий Вейерштрасса и Лежандра. 3.3 Достаточные условия минимума функционала.	20	10	6	4	10	10	10
5	9	Раздел 4. Первая и вторая вариации функционала. Уравнение Эйлера-Лагранжа. 4.1 Первая и вторая вариации функционала. Уравнение Эйлера-Лагранжа. 4.2 Условие Якоби о возможности построения поля экстремалей.	11	6	4	2	5	10	10
5	9	Раздел 5. Принцип наименьшего действия. 5.1 Простейшая векторная задача классического вариационного исчисления. 5.2 Принцип наименьшего действия. 5.3 Естественные граничные условия для простейшего функционала. 5.4 Уравнение Эйлера—Пуассона. 5.5 Задача Больца. 5.6 Изопериметрическая задача.	29	14	10	4	15	10	10
5	9	Раздел 6. Задача Лагранжа с голономными и неголономными связями. 6.1 Задача Лагранжа с голономными связями. 6.2 Задача Лагранжа в понтрягинской форме.	13	7	4	3	6	10	10
Всего за 9 семестр			108	51	34	17	57	60	60
5	10	Раздел 7. Отдельные разделы функционального анализа. 1.1 Ортогональные системы функций, ряды из них. 1.2 Уравнение Бесселя, его решение. 1.3 Ортогональность функций Бесселя. 1.4 Интеграл Фурье.	11	3	2	1	8	5	5
5	10	Раздел 8. Уравнение малых колебаний. 2.1 Вывод и решение уравнения малых колебаний способом Даламбера. 2.2 Вывод и решение уравнения малых колебаний способом Фурье.	24	12	8	4	12	10	10
5	10	Раздел 9. Уравнение теплопроводности. 3.1. Вывод уравнения теплопроводности для различных случаев. 3.2. Решение уравнения теплопроводности для различных случаев.	30	15	10	5	15	10	10
5	10	Раздел 10. Уравнения Лапласа и Пуассона. 4.1 Вывод и решение уравнения Лапласа. 4.2 Вывод и решение уравнения Пуассона.	30	15	10	5	15	10	10
5	10	Раздел 11. Линейные уравнения 2 порядка в частных производных. 5.1. Классификация линейных уравнений 2 порядка в частных производных. 5.2. Приведение линейных уравнений к каноническому виду.	13	6	4	2	7	5	5
Всего за 10 семестр			108	51	34	17	57	40	40
Всего по дисциплине			216	102	68	34	114	100	100

#### 3.2. Аудиторный практикум

№ п/п	Номер и наименование раздела дисциплины	Тема практического занятия	Объем, ауд. часов
1	Раздел 1. Простейшая задача классического вариационного исчисления.	Простейшая задача классического вариационного исчисления. Необходимое условие экстремума в простейшей задаче классического вариационного исчисления	2
2	Раздел 2. Достаточные условия слабого минимума в простейшей задаче.	Достаточные условия слабого минимума в простейшей задаче классического вариационного исчисления Условие Лежандра. Условие Якоби.	2
3	Раздел 3. Функция Вейерштрасса. Необходимое условие сильного минимума в простейшей задаче классического вариационного исчисления.	Необходимое условие сильного минимума в простейшей задаче классического вариационного исчисления. Функция Вейерштрасса. Связь условий Вейерштрасса и Лежандра. Достаточные условия минимума функционала.	4
4	Раздел 4. Первая и вторая вариации функционала. Уравнение Эйлера-Лагранжа.	Первая и вторая вариации функционала. Уравнение Эйлера—Лагранжа. Условие Якоби о возможности построения поля экстремалей	2
5	Раздел 5. Принцип наименьшего действия.	Простейшая векторная задача классического вариационного исчисления. Принцип наименьшего действия. Естественные граничные условия для простейшего функционала. Уравнение Эйлера—Пуассона. Задача Больца. Изопериметрическая задача.	4
6	Раздел 6. Задача Лагранжа с голономными и неголономными связями.	Задача Лагранжа с голономными связями. Задача Лагранжа в понтригинской форме.	3
Всего за 9 семестр			17
7	Раздел 7. Отдельные разделы функционального анализа.	Ортогональные системы функций, ряды из них. Уравнение Бесселя, его решение. Ортогональность функций Бесселя, интеграл Фурье.	1
8	Раздел 8. Уравнение малых колебаний.	Вывод и решение уравнения малых колебаний способом Даламбера. Вывод и решение уравнения малых колебаний способом Фурье.	4
9	Раздел 9. Уравнение теплопроводности.	Вывод и решение уравнения теплопроводности для различных случаев.	5
10	Раздел 10. Уравнения Лапласа и Пуассона.	Вывод и решение уравнения Лапласа. Вывод и решение уравнения Пуассона.	5
11	Раздел 11. Линейные уравнения 2 порядка в частных производных.	Линейные уравнения 2 порядка в частных производных.	2
Всего за 10 семестр			17

#### 3.3. Самостоятельная работа студента (СРС)

№ п/п	Номер и наименование раздела дисциплины	Содержание учебного задания	Объем, часов
1	Раздел 1. Простейшая задача классического вариационного исчисления.	Повторение необходимых условий локального экстремума гладкой функции нескольких переменных. Изучение постановки простейшей вариационной задачи.	9
2	Раздел 2. Достаточные условия слабого минимума в	Повторение достаточных условий локального экстремума	12

	простейшей задаче.	гладкой функции нескольких переменных. Изучение формулировок условий Лежандра и Якоби.	
3	Раздел 3. Функция Вейерштрасса. Необходимое условие сильного минимума в простейшей задаче классического вариационного исчисления.	Изучение условий Лежандра и Якоби, функции Вейерштрасса, достаточных условий сильного минимума интегрального функционала.	10
4	Раздел 4. Первая и вторая вариации функционала. Уравнение Эйлера-Лагранжа.	Повторение формулы интегрирования по частям и дифференцирования под знаком интеграла. Изучение вывода уравнения Эйлера.	5
5	Раздел 5. Принцип наименьшего действия.	Изучение векторной задачи вариационного исчисления, принципа наименьшего действия, уравнения Эйлера-Пуассона.	15
6	Раздел 6. Задача Лагранжа с голономными и неголономными связями.	Повторение условного экстремума функции нескольких переменных. Изучение задачи Лагранжа с голономными связями.	6
<b>Всего за 9 семестр</b>			57
7	Раздел 7. Отдельные разделы функционального анализа.	Повторение темы «Ряды Фурье, операционное исчисление» из общего курса высшей математики	8
8	Раздел 8. Уравнение малых колебаний.	Решение предложенных задач. Построение математических моделей для уравнения теплопроводности и их визуализация с помощью системы компьютерной алгебры.	12
9	Раздел 9. Уравнение теплопроводности.	Решение предложенных задач. Построение математических моделей для уравнения теплопроводности и их визуализация с помощью системы компьютерной алгебры.	15
10	Раздел 10. Уравнения Лапласа и Пуассона.	Решение предложенных задач. Построение математических моделей для задач и их визуализация с помощью системы компьютерной алгебры.	15
11	Раздел 11. Линейные уравнения 2 порядка в частных производных.	Изучение теоретического материала. Решение предложенных задач.	7
<b>Всего за 10 семестр</b>			57

#### 4. ФОРМЫ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

СЕМЕСТР	НЕДЕЛИ СЕМЕСТРА																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
<b>9</b>		ВПЗ				ДР		ВПЗ		ДР		ВПЗ		ВПЗ		ДР	зач.
<b>10</b>		ВПЗ				ДР		ВПЗ		ДР		ВПЗ		ВПЗ		ДР	диф. зач.

Условные обозначения:

- ДР – диагностическая работа;
- ВПЗ – вопросы/задания по темам ПЗ;
- зач. – зачет;
- диф. зач. – дифференцированный зачет.

**Текущий контроль успеваемости** студентов проводится в дискретные временные интервалы в следующих формах:

- диагностическая работа;
- вопросы/задания по темам ПЗ.

**Промежуточная аттестация** проводится в формах:

- зачет;
- дифференцированный зачет.

## 5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 5.1. Основная литература по дисциплине:

1. А. А. Кононова, А. Л. Белкова. . Уравнения математической физики. СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2019, эл. рес.
2. А. А. Кононова, А. Л. Белкова. . Уравнения математической физики. СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2019, 66 экз.
3. А. П. Рябушко. Индивидуальные задания по высшей математике. Ч. 4 Операционное исчисление. БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2007, эл. рес.
4. А. П. Рябушко. Индивидуальные задания по высшей математике. Ч. 4 Операционное исчисление. БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2007, 198 экз.
5. А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец. Ряды. БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2007, 146 экз.
6. А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец. Индивидуальные задания по высшей математике. Ч. 3 Ряды. БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2007, эл. рес.
7. Б. П. Родин. . Вариационное исчисление. СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2017, 50 экз.
8. Б. П. Родин. . Вариационное исчисление. СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2017, эл. рес.
9. В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин. . Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018, 30 экз.
10. В. Л. Файншмидт. . Ортогональные функции и краевые задачи. СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2021, эл. рес.
11. В. Л. Файншмидт. . Ортогональные функции и краевые задачи. СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2021, 146 экз.
12. В. Л. Файншмидт, Н. В. Тарасова. . Некоторые уравнения математической физики. СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2016, 39 экз.
13. В. Л. Файншмидт, Н. В. Тарасова. . Некоторые уравнения математической физики. СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2016, эл. рес.
14. М. О. Лебедев. . Введение в вариационное исчисление. СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2022, эл. рес.
15. М. О. Лебедев. . Введение в вариационное исчисление. СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2022, 27 экз.

### 5.2. Дополнительная литература по дисциплине:

не требуется.

### 5.3. Периодические издания:

не требуются.

### 5.4. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины, электронные библиотечные системы:

1. <https://library.voenmeh.ru/> — Фундаментальная библиотека БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова;
2. <https://urait.ru/> — Образовательная платформа «Юрайт». Для вузов и ссузов..

### Современные профессиональные базы данных:

1. <https://rusneb.ru> – Национальная электронная библиотека (НЭБ);
2. <https://cyberleninka.ru/> - Научная электронная библиотека «Киберленинка»;  
<http://www.rfbr.ru/rffi/ru/library> - Полнотекстовая электронная библиотека Российского фонда фундаментальных исследований.

### Информационные справочные системы:

1. Техэксперт – Информационный портал технического регулирования: Нормы, правила, стандарты РФ;
2. [http://library.voenmeh.ru/jirbis2/index.php?option=com\\_irbis&view=irbis&Itemid=457](http://library.voenmeh.ru/jirbis2/index.php?option=com_irbis&view=irbis&Itemid=457) - БД ГОСТов собственной генерации БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова;
3. <http://www.consultant.ru/>- КонсультантПлюс- информационный портал правовой информации.

### 5.5. Программное обеспечение:

не требуется.

### 5.6. Информационные технологии:

взаимодействие с обучающимися посредством ЭИОС Moodle БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова.



## **6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **6.1. Лекционные занятия:**

специализированные требования по оборудованию отсутствуют; аудитория с посадочными местами по количеству студентов; доска.

### **6.2. Практические занятия:**

1. Аудитория с числом посадочных мест не меньше количества обучающихся.

### **6.3. Прочее:**

1. рабочее место преподавателя, оснащенное компьютером с доступом в Интернет;
2. рабочие места студентов, оснащенные компьютерами с доступом в Интернет, предназначенные для работы в электронной образовательной среде.

### Аннотация рабочей программы

Дисциплина **ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ** является дисциплиной **обязательной части блока 1** программы подготовки по направлению 24.04.05 *Двигатели летательных аппаратов*. Дисциплина реализуется на факультете О Естественнаучный БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д.Ф. Устинова кафедрой О6 ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.

Дисциплина нацелена на формирование *компетенций*:

ОПК-2 способность использовать современные информационные технологии при выполнении научных исследований и разработок; использовать стандартные пакеты прикладных программ; способен к алгоритмизации процесса вычислений при проведении исследований; организовывать и соблюдать требования информационной безопасности в профессиональной деятельности; ОПК-4 способность использовать основные положения, законы и методы естественных наук и математики, разработки физических и математических моделей исследуемых процессов, явлений и объектов для постановки и решения научно-технических задач по направлению подготовки.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с постановкой задачи и построения математической модели для реальных условий, используя методы и модели высшей математики; а также представления результатов своих исследований в виде полной математической модели.

Программой дисциплины предусмотрены следующие **виды контроля**:

**Текущий контроль успеваемости** студентов проводится в дискретные временные интервалы в следующих формах:

- диагностическая работа;
- вопросы/задания по темам ПЗ.

**Промежуточная аттестация** проводится в формах:

- зачет;
- дифференцированный зачет.

Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 6 з.е., **216 ч.** Программой дисциплины предусмотрены лекционные занятия (**68 ч.**), практические занятия (**34 ч.**), самостоятельная работа студента (**114 ч.**).

## ТЕХНОЛОГИИ И ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

### Рекомендации по освоению дисциплины для студента

Трудоемкость освоения дисциплины составляет 216 ч., из них 102 ч. аудиторных занятий, и 114 ч., отведенных на самостоятельную работу студента.

Рекомендации по распределению учебного времени по видам самостоятельной работы и разделам дисциплины приведены в таблице.

Контроль освоения дисциплины производится в соответствии с Положением о текущем, рубежном контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся.

Формы контроля и критерии оценивания приведены в приложении 3 к Рабочей программе.

Наименование работы	Рекомендуемая литература	Трудоемкость, час.
<b>Раздел 1. Простейшая задача классического вариационного исчисления.</b>		
Повторение необходимых условий локального экстремума гладкой функции нескольких переменных. Изучение постановки простейшей вариационной задачи.	М. О. Лебедев. . Введение в вариационное исчисление: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2022 (1) Б. П. Родин. . Вариационное исчисление: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2017 (1) Б. П. Родин. . Вариационное исчисление: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2017 (1) В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин. . Вариационное исчисление и оптимальное управление: М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018 (1)	9
Итого по разделу 1		9
<b>Раздел 2. Достаточные условия слабого минимума в простейшей задаче.</b>		
Повторение достаточных условий локального экстремума гладкой функции нескольких переменных. Изучение формулировок условий Лежандра и Якоби.	М. О. Лебедев. . Введение в вариационное исчисление: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2022 (2) Б. П. Родин. . Вариационное исчисление: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2017 (2) Б. П. Родин. . Вариационное исчисление: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2017 (2) В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин. . Вариационное исчисление и оптимальное управление: М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018 (3)	12
Итого по разделу 2		12
<b>Раздел 3. Функция Вейерштрасса. Необходимое условие сильного минимума в простейшей задаче классического вариационного исчисления.</b>		
Изучение условий Лежандра и Якоби, функции Вейерштрасса, достаточных условий сильного минимума интегрального функционала.	Б. П. Родин. . Вариационное исчисление: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2017 (3) Б. П. Родин. . Вариационное исчисление: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2017 (3) В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин. . Вариационное исчисление и оптимальное управление: М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018 (3) М. О. Лебедев. . Введение в вариационное исчисление: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2022 (2)	10
Итого по разделу 3		10
<b>Раздел 4. Первая и вторая вариации функционала. Уравнение Эйлера-Лагранжа.</b>		
Повторение формулы интегрирования по частям и дифференцирования под знаком интеграла. Изучение вывода уравнения Эйлера.	Б. П. Родин. . Вариационное исчисление: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2017 (4) Б. П. Родин. . Вариационное исчисление: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2017 (4) В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин. . Вариационное исчисление и оптимальное управление: М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018 (2, 4) М. О. Лебедев. . Введение в вариационное исчисление: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2022 (3, 4, 5, 6, 13)	5
Итого по разделу 4		5
<b>Раздел 5. Принцип наименьшего действия.</b>		
Изучение векторной задачи вариационного исчисления, принципа наименьшего действия, уравнения Эйлера-Пуассона.	Б. П. Родин. . Вариационное исчисление: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2017 (5) Б. П. Родин. . Вариационное исчисление: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2017 (5) В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин. . Вариационное исчисление и оптимальное управление: М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018 (4) М. О. Лебедев. . Введение в вариационное исчисление: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2022 (9, 10, 12)	15
Итого по разделу 5		15
<b>Раздел 6. Задача Лагранжа с голономными и неголономными связями.</b>		
Повторение условного экстремума функции нескольких переменных. Изучение задачи Лагранжа с голономными	М. О. Лебедев. . Введение в вариационное исчисление: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2022 (7)	6

связями.	В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин. . Вариационное исчисление и оптимальное управление: М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018 (4) Б. П. Родин. . Вариационное исчисление: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2017 (4) Б. П. Родин. . Вариационное исчисление: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2017 (4)	
Итого по разделу 6		6
<b>Раздел 7. Отдельные разделы функционального анализа.</b>		
Повторение темы «Ряды Фурье, операционное исчисление» из общего курса высшей математики	А. П. Рябушко. Индивидуальные задания по высшей математике. Ч. 4 Операционное исчисление: БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2007 (16) В. Л. Файншмидт. . Ортогональные функции и краевые задачи: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2021 (1, 2) А. А. Кононова, А. Л. Белкова. . Уравнения математической физики: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2019 (1) А. А. Кононова, А. Л. Белкова. . Уравнения математической физики: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2019 (1) А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец. Ряды: БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2007 (12) А. П. Рябушко. Индивидуальные задания по высшей математике. Ч. 4 Операционное исчисление: БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2007 (16) А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец. Индивидуальные задания по высшей математике. Ч. 3 Ряды: БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2007 (12) В. Л. Файншмидт. . Ортогональные функции и краевые задачи: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2021 (1, 2)	8
Итого по разделу 7		8
<b>Раздел 8. Уравнение малых колебаний.</b>		
Решение предложенных задач. Построение математических моделей для уравнения теплопроводности и их визуализация с помощью системы компьютерной алгебры.	А. А. Кононова, А. Л. Белкова. . Уравнения математической физики: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2019 (2) А. А. Кононова, А. Л. Белкова. . Уравнения математической физики: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2019 (2) В. Л. Файншмидт, Н. В. Тарасова. . Некоторые уравнения математической физики: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2016 (1) А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец. Ряды: БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2007 (12) А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец. Индивидуальные задания по высшей математике. Ч. 3 Ряды: БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2007 (12) В. Л. Файншмидт, Н. В. Тарасова. . Некоторые уравнения математической физики: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2016 (1)	12
Итого по разделу 8		12
<b>Раздел 9. Уравнение теплопроводности.</b>		
Решение предложенных задач. Построение математических моделей для уравнения теплопроводности и их визуализация с помощью системы компьютерной алгебры.	В. Л. Файншмидт, Н. В. Тарасова. . Некоторые уравнения математической физики: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2016 (2) А. П. Рябушко. Индивидуальные задания по высшей математике. Ч. 4 Операционное исчисление: БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2007 (16) А. А. Кононова, А. Л. Белкова. . Уравнения математической физики: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2019 (3) А. А. Кононова, А. Л. Белкова. . Уравнения математической физики: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2019 (3) В. Л. Файншмидт, Н. В. Тарасова. . Некоторые уравнения математической физики: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2016 (2) А. П. Рябушко. Индивидуальные задания по высшей математике. Ч. 4 Операционное исчисление: БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2007 (16)	15
Итого по разделу 9		15
<b>Раздел 10. Уравнения Лапласа и Пуассона.</b>		
Решение предложенных задач. Построение математических моделей для задач и их визуализация с помощью системы компьютерной алгебры.	В. Л. Файншмидт, Н. В. Тарасова. . Некоторые уравнения математической физики: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2016 (3) А. А. Кононова, А. Л. Белкова. . Уравнения математической физики: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2019 (4) В. Л. Файншмидт, Н. В. Тарасова. . Некоторые уравнения математической физики: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2016 (3)	15

	А. А. Кононова, А. Л. Белкова. . Уравнения математической физики: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2019 (4)	
Итого по разделу 10		15
<b>Раздел 11. Линейные уравнения 2 порядка в частных производных.</b>		
Изучение теоретического материала. Решение предложенных задач.	<p>А. А. Кононова, А. Л. Белкова. . Уравнения математической физики: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2019 (5)</p> <p>А. А. Кононова, А. Л. Белкова. . Уравнения математической физики: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2019 (5)</p> <p>В. Л. Файншмидт, Н. В. Тарасова. . Некоторые уравнения математической физики: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2016 (4)</p> <p>В. Л. Файншмидт, Н. В. Тарасова. . Некоторые уравнения математической физики: СПб.БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, 2016 (4)</p>	7
Итого по разделу 11		7

## ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Фонд оценочных средств, позволяющие оценить результаты обучения по данной дисциплине, включают в себя:

- диагностическая работа
- вопросы/задания по темам ПЗ;
- зачет;
- дифференцированный зачет.

### Критерии оценивания

#### Диагностическая работа

Диагностическая работа проводится в форме теста в ЭИОС Moodle:

- при правильном ответе менее чем на 60% вопросов - не аттестация;
- при правильном ответе на 60% вопросов и более - аттестация.

#### Вопросы/задания по темам ПЗ

Выполнение контрольных мероприятий по темам практических занятий и самостоятельной работы, которые объявляются в начале семестра с указанием баллов за их выполнение в соответствии с технологической картой курса. Образцы вопросов и технологические карты можно найти в УМК дисциплины и ЭИОС Moodle.

#### Зачет

Оценка "зачтено" выставляется, если набрано от 60 баллов в соответствии с технологической картой курса.

#### Дифференцированный зачет

Оценка "зачтено-удовлетворительно" выставляется, если набрано от 51 до 74 баллов в соответствии с технологической картой курса.

Оценка "зачтено-хорошо" выставляется, если набрано от 75 до 84 баллов в соответствии с технологической картой курса.

Оценка "зачтено-отлично" выставляется, если набрано от 85 баллов в соответствии с технологической картой курса.

КУРС	СЕМЕСТР	Наименование разделов и дидактических единиц	ВСЕГО	Аудиторные занятия в контактной форме			Самостоятельная работа студентов	Формируемая компетенция, %		НАИМЕНОВАНИЕ ОЦЕНОЧНОГО СРЕДСТВА
				ВСЕГО	Лекции	Практические занятия		ОПК-2	ОПК-4	
5	9	Раздел 1. Простейшая задача классического вариационного исчисления.	15	6	4	2	9	10	10	Вопросы/ задания по темам ПЗ
5	9	Раздел 2. Достаточные условия слабого минимума в простейшей задаче.	20	8	6	2	12	10	10	Вопросы/ задания по темам ПЗ
5	9	Раздел 3. Функция Вейерштрасса. Необходимое условие сильного минимума в простейшей задаче классического вариационного исчисления.	20	10	6	4	10	10	10	Вопросы/ задания по темам ПЗ
5	9	Раздел 4. Первая и вторая вариации функционала. Уравнение Эйлера-Лагранжа.	11	6	4	2	5	10	10	Вопросы/ задания по темам ПЗ
5	9	Раздел 5. Принцип наименьшего действия.	29	14	10	4	15	10	10	Вопросы/ задания по темам ПЗ
5	9	Раздел 6. Задача Лагранжа с голономными и неголономными связями.	13	7	4	3	6	10	10	Вопросы/ задания по темам ПЗ
Всего за 9 семестр			108	51	34	17	57	60	60	
5	10	Раздел 7. Отдельные разделы функционального анализа.	11	3	2	1	8	5	5	Вопросы/ задания по темам ПЗ
5	10	Раздел 8. Уравнение малых колебаний.	24	12	8	4	12	10	10	Вопросы/ задания по темам ПЗ
5	10	Раздел 9. Уравнение теплопроводности.	30	15	10	5	15	10	10	Вопросы/ задания по темам ПЗ
5	10	Раздел 10. Уравнения Лапласа и Пуассона.	30	15	10	5	15	10	10	Вопросы/ задания по темам ПЗ
5	10	Раздел 11. Линейные уравнения 2 порядка в частных производных.	13	6	4	2	7	5	5	Вопросы/ задания по темам ПЗ
Всего за 10 семестр			108	51	34	17	57	40	40	
Всего по дисциплине			216	102	68	34	114	100	100	

## Критерии оценивания

### ОПК-2

Вопросы открытого типа:

№ 1

Назовем расстоянием  $n$ -го порядка на отрезке  $[a; b]$  между функциями  $f(x)$  и  $g(x)$  сумму

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x) - g'(x)| + \dots + \max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)|$$

Найти расстояние 1-го порядка между функциями  $y = x$  и  $y = x^3$  на отрезке  $[-1; 1]$

№ 2

Назовем расстоянием  $n$ -го порядка на отрезке  $[a; b]$  между функциями  $f(x)$  и  $g(x)$  сумму

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x) - g'(x)| + \dots + \max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)|$$

Найти расстояние 0-го порядка между функциями  $g(x) = 1$  и  $f(x) = 2x$  на отрезке  $[0; 1]$

№ 3

Какой объект ищется при решении простейшей вариационной задачи?

№ 4

Найти допустимую экстремаль в простейшей задаче вариационного исчисления

$$\int_0^1 y'^2 dx \rightarrow \text{extr}, y(0) = 2, y(2) = 0.$$

№ 5

Уравнение Эйлера  $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$  для функционала  $J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$  является (назовите тип дифференциального уравнения)

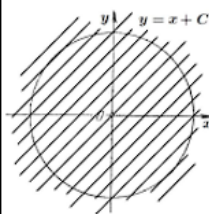
№ 6

Записать вид уравнения Эйлера для функционала

$$J(y, z) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 + 2yz) dx, y(0) = z(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

№ 7

Приведенное на рисунке поле для круга  $x^2 + y^2 \leq 1$  является



№ 8

К какому типу задач относится вариационная задача поиска кривой заданной длины, охватывающей наибольшую площадь?

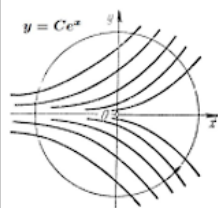
№ 9

Семейство кривых  $y = y(x; C)$  образует \_\_\_\_\_ поле в заданной области  $D$  плоскости  $ХОУ$ , если через каждую точку  $(x; y)$  этой области проходит одна и только одна кривая семейства  $y = y(x; C)$ :

№ 10



Приведенное на рисунке поле для круга  $x^2 + y^2 \leq 1$  является



№ 11

Приведенное уравнение имеет порядок

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = z^5$$

№ 12

Найти  $u = u(x; y)$  решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = y, & x \geq 0, -\infty < y < +\infty \\ u|_{x=0} = f(y), \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \phi(y), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{x=0} = \psi(y). \end{cases}$$

№ 13

Приведенное уравнение является уравнением какого типа

$$u_{xx} + 8u_{xy} + 25u_{yy} - 3u_y + 2 = 0$$

№ 14

Указать тип приведенного уравнения

$$2 \sin(x + y) \cdot u_{xx} - x \cos(y) \cdot u_{xy} + xy \cdot u_x - 3u + 1 = 0$$

№ 15

Приведенное уравнение является уравнением какого типа

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} - 3u_x + 2u_y + 1 = 0$$

№ 16

Функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  называются ортогональными с весом  $\rho(x)$  на промежутке  $[a; b]$ , если выполняется равенство

№ 17

При решении волнового уравнения нетривиальное решение задачи  $X''(x) + \lambda X(x) = 0, X(x) \neq 0$  имеет вид  $X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda x} D_2 \sin \sqrt{\lambda x} +$ . При заданных граничных условиях  $u_x(0; t) = u_x(l; t) = 0$  собственная функция имеет вид

№ 18

Метод Фурье решения уравнения свободных колебаний конечной струны с закрепленными концами состоит в поиске решения  $U(x; t)$  в виде

№ 19

Краевая задача для однородного уравнения Лапласа в односвязной области  $\Omega \in \mathbb{R}_2$ , где  $\vec{n}$  - нормально к границе  $\Omega$ , имеющая вид, называется

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega} = g(x, y) \end{cases}$$

№ 20

Приведенный оператор является какого типа

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

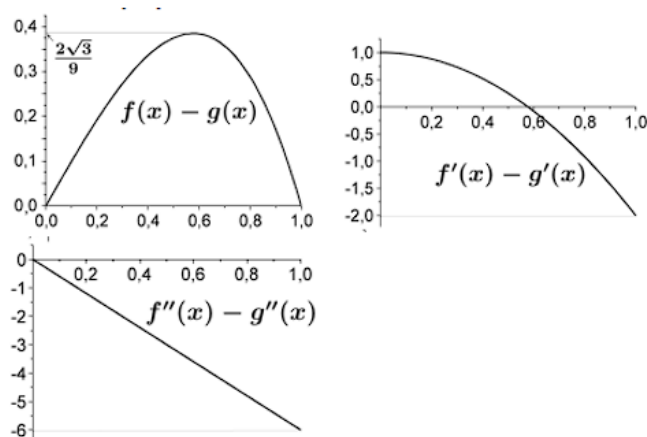
Вопросы закрытого типа:

№ 1

Назовем расстоянием  $n$ -го порядка на отрезке  $[a; b]$  между функциями  $f(x)$  и  $g(x)$  сумму

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x) - g'(x)| + \dots + \max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)|$$

Найти расстояние 2-го порядка между функциями  $y = x$  и  $y = x^3$  на отрезке  $[0; 1]$  по приведенным графикам:



1	8
2	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$
3	$8 + \frac{2\sqrt{3}}{9}$
4	6

№ 2

Назовем расстоянием  $n$ -го порядка на отрезке  $[a; b]$  между функциями  $f(x)$  и  $g(x)$  сумму

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x) - g'(x)| + \dots + \max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)|$$

Найти расстояние 1-го порядка между функциями  $g(x) = 1$  и  $f(x) = 2x$  на отрезке  $[0; 1]$

1.	3
2.	$\int_0^1  2x - 1  dx$
3.	0
4.	$ 2x - 1 $

№ 3

При каких  $F(x, y, y')$  уравнения Эйлера-Лагранжа функционала  $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$  будут дифференциальными уравнениями **первого** порядка

1	$F(y, y', x) = x^2 + y'^2$
2	$F(y, y', x) = x^2 + y^2$
3	$F(y, y', x) = x^2 y' + y'^2$
4	$F(y, y', x) = x(y'^2 + y^3)$

№ 4

Если функция  $y = y(x)$  доставляет экстремум функционалу  $J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$ , то она является решением уравнения

1	$F(x, y, y') = 0$
2	$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} = 0$
3	$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'}$
4	$\frac{d}{dx} F_{y'} = F_y$

№ 5

При каких  $F(x, y, y')$  вариационная задача для функционала  $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$  не имеет смысла (уравнения Эйлера-Лагранжа выполнены автоматически)

1	$F(y, y', x) = x^2 + y'^2$
2	$F(y, y', x) = 2xy'^2 + 2yx^2y'$
3	$F(y, y', x) = 3x^2y^2 + 2yx^3y'$
4	$F(y, y', x) = x(y^2 + y^3)$

№ 6

Установить соответствие между подынтегральным выражением функционала  $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$  и особенностями уравнения Эйлера-Лагранжа

1	$F(y, y', x) = 2xy'^2 + 2yx^2y'$	А	Выполняется автоматически
2	$F(y, y', x) = y'^2 + y^2$	Б	Имеет первый интеграл
3	$F(y, y', x) = x^2 + y^2$	В	Алгебраическое
4	$F(y, y', x) = x^2 + y'^2$	Г	Диф.ур. первого порядка

№ 7

Указать, какие функционалы определяют уравнение Эйлера-Лагранжа вида  $y'' + y^2 = 0$

1	$\int \left( x + \frac{1}{2}y'^2 - \frac{y^3}{3} \right) dx$
2	$\int (xy' + y + 3y'^2 - 2y^3) dx$
3	$\int (xy' + y + y^2 - y'^3) dx$
4	$\int (xy' - y^3 + y^2 + y'^2) dx$

№ 8

Дан функционал  $J(y) = \int_a^b A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx$ , известно, что левый конец экстремали скользит по кривой  $y(a) = \psi(a)$ , а правый скользит по кривой  $y(b) = \varphi(b)$ . Указать, какие условия нужно поставить на границе отрезка  $[a; b]$

1	$1 + \psi'(a)y'(a) = 0, 1 + \varphi'(b)y'(b) = 0$
2	$1 - \psi'(a)y'(a) = 0, 1 + \varphi'(b)y'(b) = 0$
3	$1 + \psi'(a)y'(a) = 0, 1 - \varphi'(b)y'(b) = 0$
4	$y'(a) = 0, 1 + \varphi'(b)y'(b) = 0$

№ 9

Дан функционал  $J(y) = \int_a^b A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx$ , известно, что левый конец экстремали находится на прямой  $x = a$ , а правый скользит по кривой  $y(b) = \varphi(b)$ . Указать, какие условия нужно поставить на границе отрезка  $[a; b]$

1	$y(a) + y'(a) = 0, 1 + \varphi'(b)y'(b) = 0$
2	$y'(a) = 0, 1 + \varphi'(b) - y'(b) = 0$
3	$y'(a) = 0, 1 + \varphi'(b)y'(b) = 0$
4	$y'(a) = 1, 1 + \varphi(b)y'(b) = 0$

№ 10

Указать, при каком значении параметра  $a$  экстремаль  $y = C \cos x$  не может быть включена в центральное поле экстремалей функционала

$$J(y) = \int_0^a (y^2 - y'^2) dx$$

1	$0 < a < \pi$
2	$a > \pi$
3	$\frac{\pi}{2} < a < \pi$
4	$a$ — любое

№ 11

Выяснить какие из приведенных равенств являются уравнениями в частных производных

1	$u_{xx}^2 + u_{yy}^2 - (u_{xx} - u_{yy})^2 = 0$
2	$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
3	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$
4	$\ln x + y'' = x^2 y'$

№ 12

Общее решение  $z = \varphi(y - 2x)$  является решением уравнения

1	$\frac{\partial z}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xy$
2	$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$
3	$\frac{\partial z}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
4	$\frac{\partial z}{\partial x} + xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

№ 13

Выбрать, какая из данных функций  $u = u(x; y)$  является общим решением уравнения  $u_x = y$ . Здесь  $C(y)$ ;  $C(x)$  - произвольные функции

1	$u(x, y) = y^2/2 + C(x)$
2	$u(x, y) = xf(y) + C(x)$
3	$u(x, y) = y^2/2 + C(y)$
4	$u(x, y) = xf(y) + C(y)$

№ 14

Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению  $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = 4$ , проходящую через параболу  $y^2 = z$  в плоскости  $x = 0$ 

1	$z = y^2 - x^2$
2	$z = y^2 + x^2 - 2x$
3	$z = x^2 + y^2$
4	$z = y^2$

№ 15

Общее решение уравнения  $\frac{\partial z}{\partial x} + (e^{-x} - y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$  имеет вид  $z = \varphi(e^x y - x)$ . Каким будет частное решение этого уравнения, удовлетворяющее задаче Коши:

$$z \Big|_{x=0} = 3y + 2?$$

1	$z = 3(e^x y - x) + 2$
2	$z = \sqrt{3(e^x y - x) + 2}$
3	$z = 3\sqrt{e^x y - x} + 2$
4	$z = 3(e^x y - x)^2 + 2$

№ 16

Указать, какую нужно сделать замену переменных в линейном дифференциальном уравнении второго порядка  $u_{xx} + 5u_{xy} + 4u_{yy} = 0$ , чтобы привести его к каноническому виду.

1	$\xi = y + x, \eta = y + 3x$
2	$\xi = y + 4x, \eta = y - 2x$
3	$\xi = y - 2x, \eta = y + x$
4	$\xi = y - x, \eta = y - 4x$

№ 17

Какое из приведенных уравнений является волновым уравнением?

1	$u_{tt} = a^2 u_{xx}$
2	$u_t = a^2 u_{xx}$
3	$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy})$
4	$u_{tt} + u_{xx} = 0$

№ 18

Какое из приведенных уравнений является уравнением свободных колебаний мембраны?

1	$u_{tt} = a^2 u_{xx}$
2	$u_t = a^2 u_{xx}$
3	$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy})$
4	$u_{tt} + u_{xx} = 0$

№ 19

Поставить в соответствие криволинейную систему координат и вид оператора Лапласа  $\Delta$  в ней

1	$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	А	Сферические
2	$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$	Б	Декартовы
3	$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$	В	Цилиндрические
4	$\Delta f = \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \left[ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \sigma \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \tau \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) \right] + \frac{1}{\sigma^2 \tau^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$	Г	Параболические

№ 20

Указать, какой из дифференциальных операторов относится к смешанному типу

1	$(x - y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$
2	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (x + y^2) \frac{\partial}{\partial y^2}$
3	$(x^2 + 1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
4	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

ОПК-4

Вопросы открытого типа:

№ 1

Назовем расстоянием  $n$ -го порядка на отрезке  $[a; b]$  между функциями  $f(x)$  и  $g(x)$  сумму

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x) - g'(x)| + \dots + \max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)|$$

Найти расстояние 1-го порядка между функциями  $y = x$  и  $y = x^3$  на отрезке  $[-1; 1]$

№ 2

Назовем расстоянием  $n$ -го порядка на отрезке  $[a; b]$  между функциями  $f(x)$  и  $g(x)$  сумму

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x) - g'(x)| + \dots + \max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)|$$

Найти расстояние 0-го порядка между функциями  $g(x) = 1$  и  $f(x) = 2x$  на отрезке  $[0; 1]$

№ 3

Составить уравнение Эйлера для функционала  $J(y) = \int_0^1 (y^2 - y'^2) dx$ , заданного на множестве  $X = \{y(x) | y(x) \in C_1[0; 1], y(0) = 0, y(1) = 1\}$

№ 4

Для задачи поиска экстремума функционала

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

при граничных условиях  $y(0) = 2$ ;  $y(2) = 1$  найдено решение уравнения Эйлера

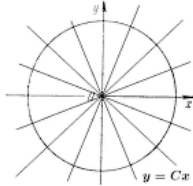
$$y = 2x^2 + C_1x + C_2$$

№ 5

Указать аргумент  $p$  функции Вейерштрасса  $E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p)$  для интегрального функционала  $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$

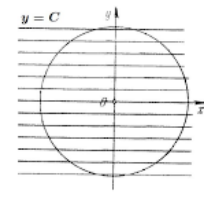
№ 6

Приведенное на рисунке поле для круга  $x^2 + y^2 \leq 1$  является



№ 7

Приведенное на рисунке поле для круга  $x^2 + y^2 \leq 1$  является



№ 8

Составить естественное граничное условие при  $x = 1$  для задачи поиска экстремума функционала  $J(y) = \int_0^1 F(x, y, y', y'') dx$ ,  $y(0) = A$ ,  $y'(0) = B$ ,  $y'(1) = H$

№ 9

Составить естественное граничное условие при  $x = 1$  для задачи поиска экстремума функционала  $J(y) = \int_0^1 F(x, y, y', y'') dx$ ,  $y(0) = A$ ,  $y'(0) = B$ ,  $y(1) = H$

№ 10

Одним из условий, входящих в комплекс условий, достаточный для того, чтобы экстремаль функционала  $J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$ ,  $y(a) = A$ ;  $y(b) = B$  доставляла ему сильный минимум, является выполнение для нее (при всех  $x \in [a; b]$ ) усиленного условия Лежандра:

№ 11

Приведенное уравнение имеет порядок

$$u_x \cdot u_{xy}^2 + u_{xx}^2 - 2u_{xy} + u_y - 2xy = 0$$

№ 12

Приведенное уравнение имеет порядок

$$u_x \cdot u_{xy}^2 + u_{xx}^2 - 2u_{xy} + u_y - 2xy = 0$$

№ 13

Указать характеристическую систему для уравнения  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$

№ 14

Указать тип приведенного уравнения

$$u_x \cdot u_{xy}^2 + 2x \cdot u \cdot u_{yy} - 3xy \cdot u_y - u = 0$$

№ 15

Приведенное уравнение является уравнением какого типа  
 $u_{xx} + 6u_{xy} + 13u_{yy} + 2u_x - 3 = 0$

№ 16

Привести к каноническому виду и найти общее решение  $u = u(x; y)$  уравнения  
 $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$ .

В ответах  $f, g$  — произвольные функции одной переменной

№ 17

При решении волнового уравнения нетривиальное решение задачи  $X''(x) + \lambda X(x) = 0, X(x) \neq 0$  имеет вид  $X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda} x + D_2 \sin \sqrt{\lambda} x$ . При заданных граничных условиях  $u(0; t) = u(l; t) = 0$  собственная функция имеет вид

№ 18

При решении волнового уравнения нетривиальное решение задачи  $X''(x) + \lambda X(x) = 0, X(x) \neq 0$  имеет вид  $X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda} x + D_2 \sin \sqrt{\lambda} x$ . При заданных граничных условиях  $u(0; t) = u_x(l; t) = 0$  собственная функция имеет вид

№ 19

Краевая задача для однородного уравнения Лапласа в односвязной области  $\Omega \in \mathbb{R}_2$ , где  $\vec{n}$  - нормально к границе  $\Omega$ , имеющая вид, называется

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = g(x, y) \end{cases}$$

№ 20

Приведенный оператор является какого типа

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + 4 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 9 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z}$$

Вопросы закрытого типа:

№ 1

Пусть дан интегральный функционал \_\_\_\_ А \_\_\_\_ граничные условия \_\_\_\_ Б \_\_\_\_ дана непрерывная функция  $y = \varphi(x)$  и существует положительное число  $\varepsilon > 0$ ; такое что для любой непрерывной функции  $y = \psi(x)$ , такой что  $\psi(x_1) = y_1, \psi(x_2) = y_2$ , для которой выполнено неравенство \_\_\_\_ В \_\_\_\_ выполняется и неравенство \_\_\_\_ Г \_\_\_\_  
 Тогда говорят, что функция  $y = \varphi(x)$  доставляет функционалу  $J(y)$  сильный локальный минимум.  
 Установить соответствие незаполненных ячеек А, Б, В, Г и блоков 1, 2, 3, 4.

1	$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx,$
2	$y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2,$
3	$\max_{x \in [x_1, x_2]}  \varphi(x) - \psi(x)  < \varepsilon,$
4	$J(\varphi(x)) \leq J(\psi(x))$

№ 2

Указать последовательность действий при решении простейшей задачи вариационного исчисления:

А	Составить уравнение Эйлера
Б	Используя граничные условия, найти неизвестные постоянные
В	Найти экстремали
Г	Установить наличие и тип экстремума

№ 3



Выбрать правильное утверждение из следующих:	
1	если функция доставляет слабый экстремум, то она доставляет и сильный
2	если функция доставляет сильный экстремум, то она доставляет и слабый
3	если функция не доставляет сильный экстремум, то она доставляет слабый
4	если функция не доставляет сильный экстремум, то она не доставляет и слабый

№ 4

Уравнение Эйлера для функционала  $J(y) = \int_a^b x^2 y'^2(x) dx$

1	имеет интеграл энергии
2	имеет интеграл импульса
3	не имеет интеграла импульса
4	имеет и интеграл энергии и интеграл импульса

№ 5

Установить соответствие между подынтегральным выражением функционала

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

и уравнением Эйлера-Лагранжа

1	$F(y, y', x) = x^2 + y'^2$	А	$y' = \text{const}$
2	$F(y, y', x) = x^2 + y^2$	Б	$y = 0$
3	$F(y, y', x) = y^2 + y'^2$	В	$y'' - y = 0$
4	$F(y, y', x) = x(y^2 + y'^2)$	Г	$xy'' + y' - xy = 0'$

№ 6

При каких  $F(x, y, y')$  уравнения Эйлера-Лагранжа функционала  $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$  будут дифференциальными уравнениями алгебраическими

1	$F(y, y', x) = x^2 + y'^2$
2	$F(y, y', x) = x^2 + y^2$
3	$F(y, y', x) = x^2 y' + y'^2$
4	$F(y, y', x) = x(y^2 + y'^3)$

№ 7

При каких  $F(x, y, y')$  вариационная задача для функционала  $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$  имеет первый интеграл

1	$F(y, y', x) = x^2 + y'^2$
2	$F(y, y', x) = 2xy'^2 + 2yx^2 y'$
3	$F(y, y', x) = 3x^2 y'^2 + 2yx^3 y'$
4	$F(y, y', x) = x(y^2 + y'^3)$

№ 8

Указать, какие функционалы определяют уравнение Эйлера-Лагранжа вида  $y'' - y = 0$

1	$\int (x^2 + y^2 + y'^2) dx$
2	$\int (xy' + y + y^2 + y'^2) dx$
3	$\int (xy' + y + y^2 - y'^2) dx$
4	$\int (xy' - y + y^2 + y'^2) dx$

№ 9

Указать, какие функционалы определяют уравнение Эйлера-Лагранжа вида  $2yy'' + y'^2 = 0$

1	$\int (x + y' + yy'^2) dx$
2	$\int (yy' + yy'^2) dx$
3	$\int (y^2 y' + yy'^2) dx$
4	$\int (yy' + xy y'^2) dx$

№ 10

Выполнение условия Якоби для допустимой экстремали, то есть для решения уравнения Эйлера, удовлетворяющего граничным условиям, говорит о том, что:

1	эта экстремаль доставляет функционалу слабый максимум
2	эта экстремаль доставляет функционалу слабый минимум
3	эта экстремаль доставляет функционалу сильный максимум
4	возможно включить допустимую экстремаль в поле экстремалей

№ 11



Говорят, что решение задачи математической физики непрерывно зависит от начальных данных, если предельно малым изменениям начальных данных задачи соответствуют предельно малые изменения решения. В каком из перечисленных случаев имеем дело с корректно поставленной задачей математической физики

1	Разность двух решений задачи не является предельно малой <u>величиной</u> , а разность начальных данных соответствующих этим решениям стремится к нулю
2	Не существует решения задачи удовлетворяющего всем уравнениям и условиям задачи
3	При одних и тех же начальных данных существует два решения удовлетворяющих всем уравнениям и условиям задачи
4	Решение существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных

№ 12

Выяснить какие из приведенных равенств являются уравнениями в частных производных

1	$u_{xx}^2 + u_{yy}^2 - (u_{xx} - u_{yy})^2 = 0$
2	$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
3	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$
4	$\ln x + y'' = x^2 y'$

№ 13

Найти уравнение поверхности, удовлетворяющей уравнению  $x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = 4z$ .

1	$z = x^2 \varphi\left(\frac{x^2}{y}\right)$
2	$z = y^2 \varphi\left(\frac{x^2}{y}\right)$
3	$z = \frac{x}{y} \varphi\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$
4	$z = xy \varphi\left(\frac{x^2}{y}\right)$

№ 14

Дано уравнение  $u'''_{xxx} = y$ . Какая из следующих функций будет **общим** решением этого уравнения:

1	$u = \frac{1}{6}y^3 + c_1(y) \cdot \frac{x^2}{2} + c_2(y) \cdot x + c_3(y)$
2	$u = \frac{1}{6}x^3y + c_1(y) \cdot \frac{x^2}{2} + c_2(y) \cdot x + c_3(y)$
3	$u = yc_1(x) + c_1(y) \cdot \frac{x^2}{2} + c_2(y) \cdot x + c_3(y)$
4	$u = \frac{1}{6}x^3y + c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x + c_3$

№ 15

Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению  $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = 4$ , проходящую через параболу  $y^2 = z$  в плоскости  $x = 0$

1	$z = y^2 - x^2$
2	$z = y^2 + x^2 - 2x$
3	$z = x^2 + y^2$
4	$z = y^2$

№ 16

Установить соответствие между уравнениями и их названиями.

1	линейное однородное уравнение первого порядка	А	$xy \frac{\partial z}{\partial x} + (x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$
2	линейное неоднородное уравнение первого порядка	Б	$(x + y) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
3	квазилинейное уравнение первого порядка	В	$zx \frac{\partial z}{\partial x} + zy \frac{\partial z}{\partial y} = x - y$
4	нелинейное уравнение первого порядка	Г	$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + 2x \frac{\partial z}{\partial x} - 3y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

№ 17

Найти  $u = u(x; y)$  решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0 \\ u|_{y=0} = 3x^2 \\ u_y|_{y=0} = 0 \end{cases}$$

1	$u(x, y) = 3x^2 + y$
2	$u(x, y) = 3x^2 + y^2$
3	$u(x, y) = 3x^2 + 2y$
4	$u(x, y) = 3x^2 - y^2$

№ 18

Какое из приведенных уравнений является уравнением теплопроводности?

1	$u_{tt} = a^2 u_{xx}$
2	$u_t = a^2 u_{xx}$
3	$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy})$
4	$u_{tt} + u_{xx} = 0$

№ 19

При решении задачи

$$\begin{aligned} U_{tt} - a^2 U_{xx} &= 0 \quad (0 \leq x \leq \ell, \quad 0 \leq t < +\infty) \\ U(x, 0) &= \varphi(x), \quad U_t(x, 0) = \psi(x), \quad U(0, t) = 0, \quad U(\ell, t) = 0 \end{aligned}$$

методом Фурье используется разложение функций  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ :

1	в ряд Фурье
2	в степенной ряд
3	в ряд Лорана
4	в произведение многочленов

№ 20

Поставить в соответствие неоднородное дифференциальное уравнение и его название

1	$\Delta u = f$	А	Волновое уравнение
2	$\Delta u + m^2 u = f$	Б	Уравнение Лапласа
3	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$	В	Уравнение Гельмгольца
4	$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$	Г	Уравнение теплопроводности